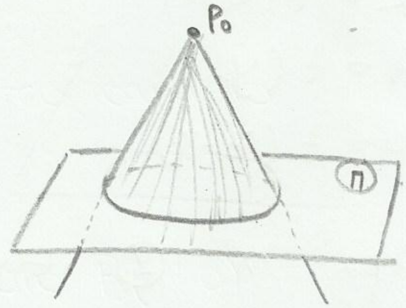
Πρόταση
Κάθε εξίσωση της μορφής $F(x-x_0, y-y_0, z-z_0)=0$ που είναι ομογενής ως προς $x-x_0$, $y-y_0$, $z-z_0$ παριστάνει κωνική επιφάνεια με κορυφή το σημείο $O(x_0, y_0, z_0)$ και οδηγό την καμπύλη $F(x-x_0, y-y_0, z-z_0)=0$, $z=z_1$ }, $z_1 \neq z_0$.

Παράδειγμα Να διαπιστωθεί ότι η εξίσωση $xy+z^2-2x-y+2=0$ παριστάνει κωνική επιφάνεια.

Λύση
$xy+z^2-2x-y+2=0 \Rightarrow x(y-2)+z^2-(y-2)=0 \Rightarrow (x-1)(y-2)+z^2=0$. Άρα όντως είναι κωνική επιφάνεια αφού είναι της μορφής $F(x-1, y-2, z-0)=0$ με κορυφή $O(1, 2, 0)$ και οδηγό $\{ xy+z^2-2x-y+2=0, z=1 \}$.

Κωνικές Επιφάνειες

Α. Να βρεθεί η εξίσωση της επιφάνειας με κορυφή $P_0(1,1,1)$ και οδηγό την καμπύλη:



$$(C): \begin{cases} y^2+z^2=1 \\ x+y+z=0 \end{cases}$$

Β. Νδο η ακόλουθη καμπύλη παριστάνει κωνική επιφάνεια της οποίας να προσδιοριστεί η κορυφή

ΛΥΣΗ

Α. $(\varepsilon): \dfrac{x-1}{k} = \dfrac{y-1}{\lambda} = \dfrac{z-1}{\mu}$, $\vec{u} = (k,\lambda,\mu) \parallel (\varepsilon)$

Θέτω την αναλυτική εξίσωση (ε) ίση με t

$$\frac{x-1}{k} = \frac{y-1}{\lambda} = \frac{z-1}{\mu} = t \Rightarrow \begin{cases} x = kt+1 \\ y = \lambda t+1 \\ z = \mu t+1 \end{cases}$$ οι παραμετρικές εξισώσεις

Άρα, αντικαθιστώντας στη (C):

$$\begin{cases} (\lambda t+1)^2+(\mu t+1)^2=1 & (1) \\ kt+\lambda t+\mu t+3=0 \Rightarrow t=-\dfrac{3}{(k+\lambda+\mu)} \end{cases}$$

Άρα, η (1) γίνεται:

$$\left(-\frac{3\lambda}{k+\lambda+\mu}+1\right)^2+\left(-\frac{3\mu}{k+\lambda+\mu}+1\right)^2=1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (k-2\lambda+\mu)^2+(k+\lambda-2\mu)=(k+\lambda+\mu)^2 \Rightarrow \dots \Rightarrow$$

$$\Rightarrow k^2+4\lambda^2+4\mu^2-10\lambda\mu-4k\lambda-4k\mu=0 \quad (2)$$

Θέτοντας στη συνέχεια την (ε) ίση με $\frac{1}{t}$

Παίρνουμε τις εξισώσεις

$$\begin{cases} k = t(x-1) \\ \lambda = t(y-1) \\ \mu = t(z-1) \end{cases}$$

Άρα, η ② είναι:

$$t^2\left((x-1)^2+4(y-1)^2+4(z-1)^2-10(y-1)(z-1)-4(x-1)(y-1)-4(x-1)(z-1)\right)=0$$

$$\Rightarrow (x-1)^2+4(y-1)^2+4(z-1)^2-10(y-1)(z-1)-4(x-1)(y-1)-4(x-1)(z-1)=0$$

Εξίσωση επιφάνειας ομογενής ως προς το t^2

B. $(x+2)(z-x)^2-(y-1)^2(z+2y)=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x+2)\left((z+2)-(x+2)\right)^2-(y-1)^2\left((z+2)-2(y-1)\right)=0 \Rightarrow$

$\Rightarrow (x+2)(z+2)^2-2(x+2)^2\cdot(z+2)+(x+2)^3-(y-1)^2(z+2)-2(y-1)^3=0$

ομογενής ως προς t^3 και $(x+2),(y-1),(z+2)$ και με κορυφή την $P_0(-2,1,-2)$